

# ミューラー行列の数値解析による多素子列偏光システムにおける各素子の偏光特性の抽出

金 蓮花\*・春日 翔貴\*・近藤 英一\*・高和 宏行\*\*

\*山梨大学工学部 〒400-8511 山梨県甲府市武田4-3-11

\*\*ユニオプト株式会社 〒421-1221 静岡県静岡市葵区牧ヶ谷2102

## General Extraction Method of Polarization Properties of Individual Components for a Trained Polarization System by Numerical Analysis of a Mueller Matrix

Lianhua JIN\*, Syouki KASUGA\*, Eiichi KONDOH\* and Hiroyuki KOWA\*\*

\*Faculty of Engineering, University of Yamanashi, 4-3-11 Takeda, Kofu-shi, Yamanashi 400-8511

\*\*Uniopt Co., Ltd., 2102 Makigaya, Aoi-ku, Shizuoka-shi, Shizuoka 421-1221

The Mueller matrix of an optical system consisting of multiple polarization components is the multiplication result of the matrices of each component. In this paper, general extracting method of the polarization properties of individual component from the Mueller matrix of the trained polarization system was presented. The quasi-Newton method was employed for numerical calculation of nonlinearly coupled equation system, which was derived from plural elements of the Mueller matrix. The applicability of this method was investigated in detail for several typical trained systems of up to three polarization components. The availability and limitation of this method was discussed through practical experiment.

**Key words:** Mueller matrix, trained polarization system, polarization properties

### はじめに

偏光特性を有する物質と入射光の相互作用を表現できる量のひとつが、その物質のミューラー行列である<sup>1)</sup>。ミューラー行列は4行4列の要素をもち、各要素の構成や値は物質により異なる。直線偏光子や位相子、旋光子などの単一偏光素子におけるミューラー行列の16個の要素はすべてが独立しているのではなく、定義上0と1を示す要素以外は1~3つの偏光パラメーターの関数となる。これらのパラメーターが決まれば、16個の行列要素がすべて決まる。そのため、単一偏光素子の偏光特性を求めるときに、1~3個の要素のみを測定すればよい。複数の偏光素子で構成される多素子列偏光システムのミューラー行列は、各偏光素子のミューラー行列を乗算した複雑な結果となり、16要素が構成上互いに異なる場合が多い。多素子列偏光システムにおける各素子の偏光パラメーターを求めるために、システムのミューラー行列の16要素を測定し、それらの要素の解析を行う必要がある。

これまで、ミューラー行列から偏光システムの偏光特性を判定するさまざまな解析方法が報告されている<sup>2-4)</sup>。Luらによって提案されたミューラー行列ポーラ分解法<sup>2)</sup>では、すべての偏光システムにおけるミューラー行列を、二色性素子、位相子、偏光解消子の3つの偏光素子による行列の乗算に分解し、それぞれ素子の偏光特性を求める。Savenkovらによって提案された一般化行列等価理論<sup>3)</sup>では、任意の偏光システムにおけるミューラー行列から、互いに垂直な2つの直線偏光成分あるいは回転方向の反対となる2つの円偏光成分の位相差と振幅の違いを求める。Ortega-Quijanoらによって提案されたミューラー行列微分分解法<sup>4)</sup>では、ミューラー行列の各要素の微分から、偏光システムの累積偏光特性を求める。これらの方法は、偏光システムまたは光学素子の統合偏光特性を決定するもので、多素子列偏光システムにおける個々の偏光素子の偏光特性を決定するものではない。

われわれは、2枚の位相子を組み合わせた偏光システム

E-mail: lianhua@yamanashi.ac.jp

と、2枚の位相子間に1枚の偏光子をもつ偏光システムのミュラー行列から、各偏光素子の偏光特性を求める方法を報告した<sup>5)</sup>。しかし、この方法は上記2種類の偏光素子の組み合わせにだけ適用できるもので、その他の種類の多偏光素子列構造をもつ偏光システムには適応できない。

本論文では、多素子列偏光システムのミュラー行列から個々の素子の偏光特性を同時抽出する一般解析方法を提案する。本方法では、偏光システムのミュラー行列の要素を対象に多元方程式系を立て、準ニュートン法を用いてその方程式系の数値解析を行うことで各素子の偏光パラメータを求める。本方法により同時抽出可能な偏光素子の個数について理論分析を行う。また、本方法の応用分野および限界についても述べる。

### 1. ミュラー行列の解析方法

ミュラー行列は一般に、

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と記述する。物質により行列の各要素の構成や値は異なる。直線偏光子や位相子、旋光子などの単一偏光素子は、1~3つの偏光特性を表す偏光パラメータを用いてその素子のミュラー行列を決める。例えば、直線性複屈折特性をもつ物質または位相子は、リタデーション $\delta$ と進相軸方位 $\theta$ の2つの偏光パラメータから、以下のミュラー行列をもつ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \cos \delta \sin^2 2\theta & (1 - \cos \delta) \cos 2\theta \sin 2\theta & -\sin \delta \sin 2\theta \\ 0 & (1 - \cos \delta) \cos 2\theta \sin 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos \delta \cos^2 2\theta & \sin \delta \cos 2\theta \\ 0 & \sin \delta \sin 2\theta & -\sin \delta \cos 2\theta & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (2)$$

その他の代表的な単一偏光素子の偏光パラメータとミュラー行列については付録に記述する。これらの例からわかるように、単一偏光素子のミュラー行列は非対角要素間の対称性または反対称性をもつ（ただし、異方性反射表面のミュラー行列<sup>6)</sup>はこのような性質をもたない）。そのため、物質の偏光特性を示すミュラー行列は以下の一般式で表すことができる。

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ \pm B & E & F & G \\ \pm C & \pm F & H & K \\ \pm D & \pm G & \pm K & L \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここで、符号+と-は、それぞれ対称性と反対称性を示すもので、左の非対角要素が一斉に+または-になるわけではない。

$n$ 個の偏光素子列で構成されている偏光システムのミュラー行列 $M$ は、それぞれの単一素子のミュラー行列を乗算したものとなる。

$$M = \prod_{k=1}^n M_{n-k+1} \quad (4)$$

すなわち、入射光が通過する順に行列を右から乗算すると全体の系のミュラー行列が得られる。ここで、行列の乗算は交換法則が成り立たないため、式(4)の偏光素子行列の順を入れ替えることはできない。Fig. 1 (a) ~ (c)に多素子列偏光システムの構造例を示す。以下、具体的な $n$ 個素子列構造は偏光素子1-偏光素子2-...-偏光素子 $n$ と、「-」を用いて表記する。

偏光システムが3つ( $n=3$ )の単一偏光素子の列で構

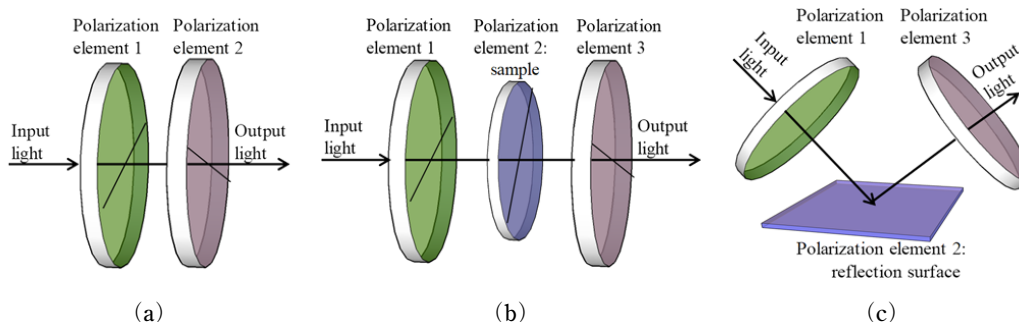


Fig. 1 Trained polarization systems with (a) two and (b, c) three polarization elements.

成される場合、システムのミューラー行列  $M_{123}$  の各要素  $m_{11} \sim m_{44}$  は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= A_3 (A_1 A_2 \pm B_1 B_2 \pm C_1 C_2 \pm D_1 D_2) \pm B_3 (A_1 B_2 + B_1 E_2 \\
 &\quad + C_1 F_2 + D_1 G_2) + C_3 (\pm A_1 C_2 + B_1 F_2 \pm C_1 H_2 \pm D_1 K_2) \\
 &\quad + D_3 (\pm A_1 D_2 + B_1 G_2 + C_1 K_2 \pm D_1 L_2) \\
 m_{12} &= A_3 (B_1 A_2 + E_1 B_2 \pm F_1 C_2 \pm G_1 D_2) + B_3 (\pm A_1 B_2 + B_1 E_2 \\
 &\quad \pm C_1 F_2 \pm D_1 G_2) \pm C_3 (B_1 C_2 + E_1 F_2 + F_1 H_2 + G_1 K_2) \\
 &\quad + D_3 (\pm B_1 D_2 \pm E_1 G_2 + F_1 K_2 \pm G_1 L_2) \\
 m_{13} &= A_3 (C_1 A_2 + F_1 B_2 + H_1 C_2 \pm K_1 D_2) + B_3 (\pm C_1 B_2 + F_1 E_2 \\
 &\quad + H_1 F_2 \pm K_1 G_2) + C_3 (\pm C_1 C_2 \pm F_1 F_2 + H_1 H_2 \pm K_1 K_2) \\
 &\quad \pm D_3 (C_1 D_2 + F_1 G_2 + H_1 K_2 + K_1 L_2) \\
 m_{14} &= A_3 (D_1 A_2 + G_1 B_2 + K_1 C_2 + L_1 D_2) + B_3 (\pm D_1 B_2 + G_1 E_2 \\
 &\quad + K_1 F_2 + L_1 G_2) + C_3 (\pm D_1 C_2 \pm G_1 F_2 + K_1 H_2 + L_1 K_2) \\
 &\quad + D_3 (\pm D_1 D_2 \pm G_1 G_2 \pm K_1 K_2 + L_1 L_2) \\
 m_{21} &= \pm B_3 (A_1 A_2 \pm B_1 B_2 \pm C_1 C_2 \pm D_1 D_2) + E_3 (A_1 B_2 + B_1 E_2 \\
 &\quad + C_1 F_2 + D_1 G_2) + F_3 (\pm A_1 C_2 + B_1 F_2 \pm C_1 H_2 \pm D_1 K_2) \\
 &\quad + G_3 (\pm A_1 D_2 + B_1 G_2 + C_1 K_2 \pm D_1 L_2) \\
 m_{22} &= \pm B_3 (B_1 A_2 + E_1 B_2 \pm F_1 C_2 \pm G_1 D_2) + E_3 (\pm B_1 B_2 \\
 &\quad + E_1 E_2 \pm F_1 F_2 \pm G_1 G_2) + F_3 (B_1 C_2 + E_1 F_2 + F_1 H_2 \\
 &\quad + G_1 K_2) + G_3 (\pm B_1 D_2 \pm E_1 G_2 + F_1 K_2 \pm G_1 L_2) \\
 m_{23} &= \pm B_3 (C_1 A_2 + F_1 B_2 + H_1 C_2 \pm K_1 D_2) + E_3 (\pm C_1 B_2 \\
 &\quad + F_1 E_2 + H_1 F_2 \pm K_1 G_2) + F_3 (\pm C_1 C_2 \pm F_1 F_2 + H_1 H_2 \\
 &\quad \pm K_1 K_2) + G_3 (C_1 D_2 + F_1 G_2 + H_1 K_2 + K_1 L_2) \\
 m_{24} &= \pm B_3 (D_1 A_2 + G_1 B_2 + K_1 C_2 + L_1 D_2) + E_3 (\pm D_1 B_2 \\
 &\quad + G_1 E_2 + K_1 F_2 + L_1 G_2) + F_3 (\pm D_1 C_2 \pm G_1 F_2 + K_1 H_2 \\
 &\quad + L_1 K_2) + G_3 (\pm D_1 D_2 \pm G_1 G_2 \pm K_1 K_2 + L_1 L_2) \\
 m_{31} &= \pm C_3 (A_1 A_2 \pm B_1 B_2 \pm C_1 C_2 \pm D_1 D_2) \pm F_3 (A_1 B_2 + B_1 E_2 \\
 &\quad + C_1 F_2 + D_1 G_2) + H_3 (\pm A_1 C_2 + B_1 F_2 \pm C_1 H_2 \pm D_1 K_2) \\
 &\quad + K_3 (\pm A_1 D_2 + B_1 G_2 + C_1 K_2 \pm D_1 L_2) \\
 m_{32} &= \pm C_3 (B_1 A_2 + E_1 B_2 \pm F_1 C_2 \pm G_1 D_2) \pm F_3 (\pm B_1 B_2 \\
 &\quad + E_1 E_2 \pm F_1 F_2 \pm G_1 G_2) + H_3 (B_1 C_2 + E_1 F_2 + F_1 H_2 \\
 &\quad + G_1 K_2) + K_3 (\pm B_1 D_2 \pm E_1 G_2 + F_1 K_2 \pm G_1 L_2) \\
 m_{33} &= \pm C_3 (C_1 A_2 + F_1 B_2 + H_1 C_2 \pm K_1 D_2) \pm F_3 (\pm C_1 B_2 \\
 &\quad + F_1 E_2 + H_1 F_2 \pm K_1 G_2) + H_3 (\pm C_1 C_2 \pm F_1 F_2 + H_1 H_2 \\
 &\quad \pm K_1 K_2) + K_3 (C_1 D_2 + F_1 G_2 + H_1 K_2 + K_1 L_2) \\
 m_{34} &= \pm C_3 (D_1 A_2 + G_1 B_2 + K_1 C_2 + L_1 D_2) \pm F_3 (\pm D_1 B_2 \\
 &\quad + G_1 E_2 + K_1 F_2 + L_1 G_2) + H_3 (\pm D_1 C_2 \pm G_1 F_2 + K_1 H_2 \\
 &\quad + L_1 K_2) + K_3 (\pm D_1 D_2 \pm G_1 G_2 \pm K_1 K_2 + L_1 L_2) \\
 m_{41} &= \pm D_3 (A_1 A_2 \pm B_1 B_2 \pm C_1 C_2 \pm D_1 D_2) \pm G_3 (A_1 B_2 + B_1 E_2 \\
 &\quad + C_1 F_2 + D_1 G_2) \pm K_3 (\pm A_1 C_2 + B_1 F_2 \pm C_1 H_2 \pm D_1 K_2) \\
 &\quad + L_3 (\pm A_1 D_2 + B_1 G_2 + C_1 K_2 \pm D_1 L_2) \\
 m_{42} &= \pm D_3 (B_1 A_2 + E_1 B_2 \pm F_1 C_2 \pm G_1 D_2) \pm G_3 (\pm B_1 B_2 \\
 &\quad + E_1 E_2 \pm F_1 F_2 \pm G_1 G_2) \pm K_3 (B_1 C_2 + E_1 F_2 + F_1 H_2 \\
 &\quad + G_1 K_2) + L_3 (\pm B_1 D_2 \pm E_1 G_2 + F_1 K_2 \pm G_1 L_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{43} &= \pm D_3 (C_1 A_2 + F_1 B_2 + H_1 C_2 \pm K_1 D_2) \pm G_3 (\pm C_1 B_2 \\
 &\quad + F_1 E_2 + H_1 F_2 \pm K_1 G_2) + K_3 (\pm C_1 C_2 \pm F_1 F_2 + H_1 H_2 \\
 &\quad \pm K_1 K_2) + L_3 (C_1 D_2 + F_1 G_2 + H_1 K_2 + K_1 L_2) \\
 m_{44} &= \pm D_3 (D_1 A_2 + G_1 B_2 + K_1 C_2 + L_1 D_2) \pm G_3 (\pm D_1 B_2 \\
 &\quad + G_1 E_2 + K_1 F_2 + L_1 G_2) + K_3 (\pm D_1 C_2 \pm G_1 F_2 + K_1 H_2 \\
 &\quad + L_1 K_2) + L_3 (\pm D_1 D_2 \pm G_1 G_2 \pm K_1 K_2 + L_1 L_2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

ここで、添え字 1, 2, 3 はそれぞれ偏光素子 1, 2, 3 の行列要素であることを示す。偏光素子の数が  $n > 3$  の場合、行列計算で得られる要素の式はさらに複雑になる。

式 (5) を最多 16 元となる方程式系とみなし、各偏光素子の偏光特性を求めるのが、本研究のミューラー行列の分解コンセプトとなる。式 (3) からわかるように、単一偏光素子は  $A \sim L$  の 10 個の変数を有するため、式 (5) の 16 元方程式系からは、3 つの偏光素子列の合計 30 個となる変数を導くことは不可能である。同様に、2 素子列偏光システムのミューラー行列においても、最多 16 元方程式系となるため、合計 20 個となる変数を導くことは不可能である。 $A \sim L$  は、定義上 0 と 1 を示す要素以外に、1~3 の偏光パラメーターの関数である。したがって、3 素子列偏光システムにおけるミューラー行列は、3~9 の偏光パラメーターの方程式系として考えることができる。式 (5) で示す方程式系は非線形性を有することから、BSGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) 準ニュートン法<sup>7-10)</sup>を用いて、その解である偏光パラメーターを求める。準ニュートン法は、反復数値計算により方程式系を解く求根アルゴリズムのひとつであり、解を求めるため一般に二次収束を行う。ここでは、以下の式を用いて収束を行う。

$$e = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (m_{ij, \text{obtained}} - m_{ij, \text{theoretical}})^2 \tag{6}$$

ここで  $m_{ij, \text{obtained}}$  は測定などにより得られた行列要素の値で、 $m_{ij, \text{theoretical}}$  は式 (5) により得られる理論値である。

式 (5) は最多 16 元の方程式系となるから、単純には 16 個までの偏光パラメーターを有するすべての多素子列偏光システムのミューラー行列から解を求められるように思えるが、実際には異なる。方程式系を立て、式 (6) の収束を行うとき、① 実際計測できるミューラー行列の要素の数、② 偏光素子の種類、③ 求めたい偏光パラメーターの性質を考慮しなければならない。ミューラー行列の各要素は  $-1 \sim 1$  の値を示し、実際の計測では、 $m_{11}$  要素により残りの 15 個の要素を正規化した値である<sup>11, 12)</sup>。つまり、計測装置により得られる  $m_{11}$  要素の値は常に 1 であるため、実際に計算で用いる式は最多で 15 元の方程式系となる。次に考慮すべきことは、多素子列を構成する偏光素子による

Table 1 Trained polarization systems ( $n = 2, 3$ ) and possibility of polarization properties extraction of individual components

Trained polarization systems and polarization parameters	Practical optical systems	Equation systems derived from Eq. (5)	Variables to be obtained from Eq. (6)	Extraction possibility
Partial polarizer ( $\theta_1, q, r$ )-Depolarizer ( $a, b, c$ )	Non-ideal partial polarizer	9 coupled system	$\sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ $q, r, a, b, c$	Possible
Circular diattenuator ( $q, r$ )-Depolarizer ( $a, b, c$ )	Non-ideal circular diattenuator	5 coupled system	$q, r, a, b, c$	Possible
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Depolarizer ( $a, b, c$ )	Non-ideal retarder	9 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ $a, b, c$	Possible
Rotator ( $\theta_1$ )-Depolarizer ( $a, b, c$ )	Non-ideal rotator	5 coupled system	$\sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ $a, b, c$	Possible
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Polarizer ( $\theta_2$ ) <sup>5)</sup>	Circular polarizer	14 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ $\sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2$	Possible
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Partial polarizer ( $\theta_2, q, r$ )	Partial circular polarizer	14 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ $\sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2, q, r$	Possible
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Reflection surface ( $\psi, \Delta$ )-Retarder ( $\delta_2, \theta_2$ )	Window-Reflection surface-Window	15 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1$ $\sin \Delta, \cos \Delta, \cos 2\psi$ $\sin \delta_2, \cos \delta_2, \sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2$	Possible
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Retarder ( $\delta_2, \theta_2$ ) <sup>5)</sup>	Window-Window	9 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1,$ $\sin \delta_2, \cos \delta_2, \sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2$	Impossible (Possible)*
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Rotator ( $\theta_3$ )-Retarder ( $\delta_2, \theta_2$ )	Window-Sucrose solution-Window	9 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1,$ $\sin \delta_2, \cos \delta_2, \sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2$ $\sin 2\theta_3, \cos 2\theta_3$	Impossible (Possible)
Retarder ( $\delta_1, \theta_1$ )-Retarder ( $\delta_2, \theta_2$ )-Retarder ( $\delta_3, \theta_3$ )	Window-Birefringent material-Window	9 coupled system	$\sin \delta_1, \cos \delta_1, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1,$ $\sin \delta_2, \cos \delta_2, \sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2,$ $\sin \delta_3, \cos \delta_3, \sin 2\theta_3, \cos 2\theta_3$	Impossible

\*: "Impossible (possible)" means the "impossible" extraction becomes "possible" under the constraint conditions.

方程式系の変化である。例えば、位相子 ( $\delta_1, \theta_1$ )-位相子 ( $\delta_2, \theta_2$ )-位相子 ( $\delta_3, \theta_3$ ) の構造をもつ多素子列システムのミュラー行列は、 $m_{ii}$  と  $m_{ij}$  ( $i = 2, 3, 4$ ) 要素が理論上 0 であるため、式 (5) は実際 9 元方程式系となり、最多で 9 つの変数しか求められない。また、求めたい偏光パラメーターが角度であるとき、角度が定義される範囲により、式 (6) から求められる変数を決めなければならない。偏光素子の偏光パラメーターは、式 (3) と式 (a1)~(a3) からわかるように、角度である場合が多い。これらの角度は、偏光素子によって定義される範囲が異なる。例えば、位相子のリタレーション  $\delta$  は  $0 \sim 360^\circ$  の値を示し、進相軸方位  $\theta$  は  $-90^\circ \sim 90^\circ$  の値を示す。行列の要素は、これらの角度の三角関数または三角関数の積や冪乗で表す。そのため、式 (6) から求める解は角度 ( $An$ ) 自体ではなく、その角度 (または角度の 2 倍) の余弦 ( $\cos An$ ) と正弦 ( $\sin An$ ) を用いるべきである。最終的に、その解から角度 ( $An$ ) を導く。つまり、1 つの偏光パラメーターを得るため、式 (6) から 2 つ変数を求めることになる。Table 1 に、さまざまな種類の多素子列偏光システムのミュラー行列分解を行う際の変数の種類や分解可能性についてまとめた。位相子-位相子-位相子の多素子列システムの場合、それぞれの位相子の 2 つのパラメーターを得るため、12 個の変数を

求めなければならない。しかし、上述したようにこのシステムでは 9 元方程式系しか得られないため、実際にはこれらの数の変数を求めるのは不可能である。つまりミュラー行列の分解が不可能である。位相子 ( $\delta_1, \theta_1$ )-反射面 ( $\psi, \Delta$ )-位相子 ( $\delta_2, \theta_2$ ) の構造をもつ 3 素子列偏光システムにおいては、15 元方程式系が得られ、式 (6) から各素子の偏光パラメーターを求めることができる。

多素子列偏光システムのミュラー行列の分解を行うとき、上述した 3 点以外にも、方程式系の独立性を考える必要がある。独立していない方程式があれば、その分求められる変数の数が少なくなる。式 (5) の各要素の式は非常に複雑になっており、互いに独立であるか否かを判断するのは簡単ではない。その場合、数値計算を行い、解が特定できれば、独立した方程式の数が十分あることを判断できる。

## 2. 実 験

1 章で述べた多偏光素子列ミュラー行列の一般解析法による各偏光素子の偏光特性の抽出例として、位相子 1 ( $\delta_1, \theta_1$ )-反射表面 ( $\psi, \Delta$ )-位相子 2 ( $\delta_2, \theta_2$ ) 構造 (Fig. 1 (c)) の偏光システムのミュラー行列を測定し、各素子の偏光パラメーターを求めた。位相子と反射表面試料にはそれぞれ市

販の波長フィルム (27341-L, Edmund Optics 社) と自作の低誘電率薄膜 (有機シリカ系の多孔質体) を用いた。

偏光システム全体のミューラー行列と単一状態での各素子の偏光特性は、分光ミューラー行列エリプソメーター (RC2, J. A. Woollam 社) を用いて測定し、波長 300~325 nm 領域におけるデータ解析を行った。解析では、11 個の変数 ( $\cos\delta_{1,2}$ ,  $\sin\delta_{1,2}$ ,  $\cos2\theta_{1,2}$ ,  $\sin2\theta_{1,2}$ ,  $\cos2\psi$ ,  $\cos2\Delta$ ,  $\sin2\Delta$ ) を用いた。各波長における解析では、反復計算回数を 200 回とし、式 (6) の  $e$  を  $10^{-5}$  まで収束した。偏光パラメーターとなる角度は、以下の式から求めた。

$$\delta = \arctan \frac{\sin\delta}{\cos\delta}, \quad (0 \leq \delta \leq 360^\circ) \quad (7)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}, \quad (-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ) \quad (8)$$

$$\Delta = \arctan \frac{\sin\Delta}{\cos\Delta}, \quad (0 \leq \Delta \leq 360^\circ) \quad (9)$$

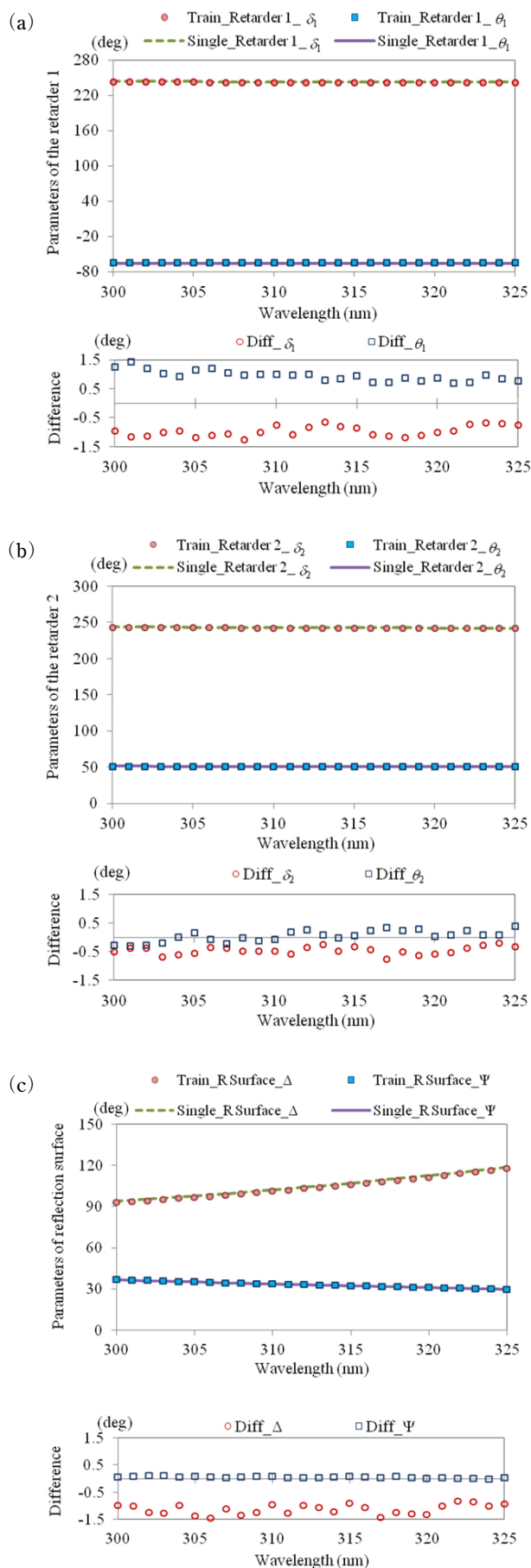
$$\psi = \frac{1}{2} \arccos(\cos2\psi), \quad (0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ) \quad (10)$$

Fig. 2 に、本解析法で求めた個々の素子の偏光パラメーター (マーク表示) と、それぞれの素子を単一状態から求めた偏光パラメーター (線表示) の値を示す。プローブ光の波長を横軸に取り、各偏光パラメーターを縦軸に取った。Fig. 2 からは、多素子列ミューラー行列を解析した場合と、それぞれの素子を個別に測定した偏光パラメーターがすべての波長域にわたってよく一致しており、本解析方法が有効であることを示している。

### 3. 考 察

本解析方法を用いて多素子列偏光システム ( $n \geq 2$ ) の個々の素子の偏光特性を求めるとき、必ず解が得られる。しかし、それが正しい解であるかについては判断しなければならない。式 (6) の数値解析により、ローカルミニマムに解が落ち着く場合、得られた結果は予想値と異なり、偏光特性の抽出は不可能となる。これら为了避免するために、式 (6) の収束を行う際、1 章で述べたミューラー行列の要素の数や偏光素子の種類、方程式系の独立性を事前に判断し、偏光パラメーターの抽出可能性を確認する。偏光パラメーターの抽出は、光学デバイスやシステムの精度向上や

Fig. 2 Extracted polarization parameters (Train\_) from the Muller matrix of a trained system of the retarder 1-reflection surface-retarder 2, and parameters (Single\_) measured for single (a and b) retarders and (c) reflection surface. Bottom graphs of (a), (b), and (c) plotted differences (Diff\_) between the extracted and measured parameters.



改良などの応用へ繋がる。

Table 1 に、さまざまな種類の 2, 3 個の素子列偏光システムにおけるミュラー行列解析による偏光パラメータの抽出可能性についてまとめるとともに、これらの偏光システムで表現される光学システムの例についてもまとめた。偏光解消を示す非理想的な単一偏光素子は、理想的な偏光素子と偏光解消子の 2 素子列偏光システム (Fig. 1 (a)) としてみなし、ミュラー行列の分解から各素子の偏光パラメータを求めることにより、その素子の性能を定量的に評価できる。市販の円偏光子 (または部分円偏光子) は、一般に四分の一波長板 ( $\delta_1, \theta_1$ ) と直線偏光子 ( $\theta_2$ ) (または部分偏光子,  $\theta_2, q, r$ ) の 2 つの偏光素子で構成されている。

測定対象物を真空セルや高圧セル、温調セルなどの測定用セルに設置し、セルの観測窓越しに測定対象物の偏光特性の計測を行う際、窓は材質の光弾性効果により複屈折性を示すことがある。この場合、窓は位相子として取り扱うことが多い (Fig. 1 (b), (c) の素子列構造参照)。例えば、高圧セル中での薄膜プロセスのその場エリプソメトリ観測<sup>13)</sup>では、窓-等方性反射表面試料-窓の偏光特性を測定し、それから窓補正を行い試料の膜厚評価を行う<sup>13)</sup>。このとき窓-等方性反射表面試料-窓は、位相子-反射表面-位相子の 3 列の偏光素子で構成するシステムとしてみなし (Fig. 1 (c))、数値解析を行う。測定対象物が旋光子や位相子である場合、Table 1 に示すように、求めたい変数の数が方程式の数より多くなるため、ミュラー行列解析を一括で行えない。

窓-窓 (位相子-位相子) の構成については、逆に求めたい変数の数に比べて方程式の数が多いが、ミュラー行列解析が完全にはできない。その理由は、式 (5) により得られた 9 つの方程式全体が互いに独立してないためと考えられる。ミュラー行列解析を可能とするために、われわれは、位相子のリタレーションの波長分散特性 ( $\delta_{\lambda_1} \neq \delta_{\lambda_2}$ ) と主軸方位の一定性 ( $\theta_{\lambda_1} \neq \theta_{\lambda_2}$ ) を利用し、2 つの波長領域でのミュラー行列から 18 元の方程式系を構成し、12 の変数 ( $\sin\delta_{1, \lambda_1}, \cos\delta_{1, \lambda_1}, \sin\delta_{1, \lambda_2}, \cos\delta_{1, \lambda_2}, \sin 2\theta_1, \cos 2\theta_1, \sin\delta_{2, \lambda_1}, \cos\delta_{2, \lambda_1}, \sin\delta_{2, \lambda_2}, \cos\delta_{2, \lambda_2}, \sin 2\theta_2, \cos 2\theta_2$ ) を求める、つまり波長分散情報という拘束条件を加え方程式の数を増やすことで、ミュラー行列の解析を行うことができた<sup>5)</sup>。ただし、この方法も常に有効なわけではない。使用ニーズにより、素子の偏光特性が波長に依存しないよう設計させる場合もある。また、方程式の数が増えると、反復数値計算法であるため、計算時間が長くなる。

実際のところ、セル窓は測定対象物の偏光特性測定への影響を最小限にするように設計されている。光弾性効果が

あまり大きくなく、したがって、リタレーション  $\delta$  は  $90^\circ$  より小さい。この場合、式 (6) で求める 2 つの変数  $\sin\delta$  と  $\cos\delta$  を  $\sin\delta$  または  $\cos\delta$  のいずれかを無視し簡略化できる。また、窓-環境-窓という構成で、窓のリタレーションと主軸方位において、リタレーションは圧力や温度の環境により変わるが、主軸方位は環境による変化を受けない。それにより、旋光子試料をセルに挿入後に得られる 9 元方程式系から 4 つの変数 ( $\sin\delta_1, \sin 2\theta_3, \cos 2\theta_3, \sin\delta_2$ ) を求めることが可能となる。

4 個 ( $n \geq 4$ ) 以上の素子で構成された偏光システムでは、最多 15 元方程式系に対し、求めたい変数が増加するため、本解析方法の応用が困難となる。

## おわりに

多偏光素子列システムのミュラー行列から、各偏光素子の偏光特性を抽出する一般方法を提案した。1 つのシステムに用いた偏光素子の偏光特性により、ミュラー行列から得られる方程式系が変わるため、偏光特性が抽出可能な偏光素子の数は異なる。本解析方法は、プログラムによるソフトウェアの開発により、3 章に述べた多偏光素子列システムにおける各偏光素子の偏光特性を簡単に抽出できる。その他の組み合わせの多偏光素子列システム ( $n \geq 2$ ) についても、偏光特性抽出可能性の判断が容易となる。

本法は、本文で述べた応用以外に、眼球の網膜検査への応用が期待される。プローブ光を眼球の瞳中央から入射し、角膜、水晶体や硝子体を通じた後、網膜で反射し、再び入射経路と同様の経路を逆にたどって出射する。ここで複屈折特性をもつ角膜を位相子とし、網膜を反射表面とする。本法によれば角膜由来の複屈折を除去することができ、眼底網膜の光学特性を精度よく測定することが可能となり、精度の高い緑内障の早期診断が可能となる。

## 付録 単一偏光素子における偏光パラメータとミュラー行列

偏光状態の方位を  $\theta$  だけ回転させる旋光子のミュラー行列：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{a1})$$

透過軸の方位が  $\theta$ 、透過強度  $q$  (透過軸に平行な直線偏光成分) と  $r$  (透過軸に垂直な直線偏光成分) の直線二色性素子 (部分偏光子ともいう、 $q=1, r=0$  のとき、直線偏光子という) のミュラー行列：

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} q+r & (q-r) \cos 2\theta & (q-r) \sin 2\theta & 0 \\ (q-r) \cos 2\theta & (q+r) \cos^2 2\theta + 2\sqrt{qr} \sin^2 2\theta & (q+r-2\sqrt{qr}) \cos 2\theta \sin 2\theta & 0 \\ (q-r) \sin 2\theta & (q+r-2\sqrt{qr}) \cos 2\theta \sin 2\theta & (q+r) \sin^2 2\theta + 2\sqrt{qr} \cos^2 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{qr} \end{pmatrix} \quad (\text{a2})$$

エリブソメトリパラメーター  $\psi$ ,  $\Delta$  を有する等方性反射表面のミュラー行列:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos 2\psi & 0 & 0 \\ -\cos 2\psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2\psi \cos \Delta & \sin 2\psi \sin \Delta \\ 0 & 0 & -\sin 2\psi \sin \Delta & \sin 2\psi \cos \Delta \end{pmatrix} \quad (\text{a3})$$

透過強度  $q$ ,  $r$  の円二色性素子のミュラー行列:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} q+r & 0 & 0 & q-r \\ 0 & 2\sqrt{qr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{qr} & 0 \\ q-r & 0 & 0 & q+r \end{pmatrix} \quad (\text{a4})$$

偏光解消子のミュラー行列 ( $0 < a, b, c \leq 1$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (\text{a5})$$

## 文 献

- 1) D. Goldstein: *Polarized Light*, 2nd ed. (Marcel Dekker, New York, 2003).
- 2) S. Lu and R. A. Chipman: *J. Opt. Soc. Am. A*, **13** (1996) 1106-1113.
- 3) S. N. Savenkov, V. V. Marienko and E. A. Oberemok: *Phys. Rev. E*, **74** (2006) 056607.
- 4) N. Ortega-Quijano and J. L. Arce-Diego: *Opt. Lett.*, **36** (2011) 1942-1944.
- 5) L. Jin, D. Kobayashi, E. Kondoh, H. Kowa and B. Gelloz: *Opt. Express*, **24** (2016) 9757-9765.
- 6) H. G. Tompkins and E. A. Irene: *Handbook of Ellipsometry* (William Andrew Publishing, New York, 2005).
- 7) C. G. Broyden: *Not. Am. Math. Soc.*, **16** (1969) 670.
- 8) R. Fletcher: *Comput. J.*, **13** (1970) 317-322.
- 9) D. Goldfarb: *Math. Comput.*, **24** (1970) 23-26.
- 10) D. F. Shanno: *Math. Comput.*, **24** (1970) 657-656.
- 11) R. M. A. Azzam: *Opt. Lett.*, **2** (1978) 148-150.
- 12) L. Jin, K. Takizawa, Y. Otani and N. Umeda: *Opt. Rev.*, **12** (2005) 281-286.
- 13) L. Jin, S. Kasuga, E. Kondoh and B. Gelloz: *Appl. Opt.*, **54** (2015) 2991-2998.